

编者按 2017年10月18日—10月20日,由陕西师范大学基础教育研究院主办、江苏省南京市中华中学承办的“全国高中批判性思维教学展示和研讨会”在南京顺利举行。本期集中刊登姚发权老师和张捷老师分别对“‘导数及其应用’引言”这一内容开展的同课异构教学课例,以及文卫星老师对这两节课例的精彩点评。

“‘导数及其应用’引言”教学设计*

姚发权(江苏省南京市中华中学)

1 学习目标

- (1)了解导数产生的起源、发展,了解导数在研究函数性质中的作用,以及在实际生活中的应用;
- (2)初步理解用无限逼近的思想求函数的导数(即切线的斜率);
- (3)能够尝试提出问题,做出假设,并有一定的理由(或寻找证据)对假设予以判断验证。

2 教学重点与难点

教学重点:导数产生的起源、发展及其应用。
教学难点:用无限逼近的思想求函数的导数(即切线的斜率)。

3 教学过程

3.1 导数的来源

(1)知道可以用 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ 来表示气温变化的快慢。

图1是某市2004年3月18日到4月20日的气温曲线图。

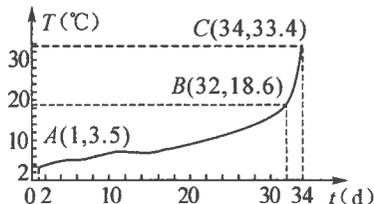


图1

问题1:你们对这个图怎么理解?发现了什么?从数学的角度如何理解这些现象?(尝试让学生提出

一些问题)

学生:前面30天温度的变化很慢,后面两天变化很快。

教师:当地人觉得3月18日到4月18日很舒服,但后面两天觉得很难受,感叹“天气热得太快了!”人们发出上述感叹的原因是什么,其数学意义是什么?

学生:很短的时间气温的变化很大。用气温的平均变化率来刻画气温的变化情况。 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ 越大,气温变

化越大。 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ 的几何意义是斜率。

(2)理解用无限逼近的思想得到瞬时变化率。

问题2:(1)一物体做直线运动,如图2,其位移与时间的函数关系是 $S=2t$,其速度是多少?你是怎么得到这个速度的?

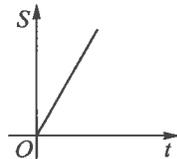


图2

学生:速度为2。因为 $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = 2$,无论 t_2, t_1 取什么值, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 都是一个常数。其几何意义是斜率。

(2)一物体做直线运动,其位移与时间的函数关系是 $S=t^2$,如图3,你能求出它的速度吗?

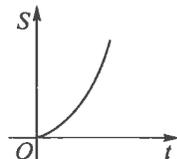


图3

提示让学生尝试得到当 $t=1$ 时的瞬时速度,体会无限逼近的思想。

平均速度 $\frac{\Delta S}{\Delta t} = 2 + \Delta t$,是一个变量。如何根据这个平均速度得到当 $t=1$ 时的瞬时速度?

* 本文系全国教育科学规划课题2016年度教育学一般课题“普通高中学生批判性思维培养研究”(课题批准号:BHA160148)研究成果。

师生共同探讨:让 Δt 无限小。 Δt 需要取很小,小到什么程度?

师生总结:用很短时间内的平均速度估计瞬时速度,这毕竟是一个估计值,不能作为精确值,那么看 Δt 需要小到什么程度,它可以任意小。 Δt 越小,越精确, Δt 小到不能再小了,它也就精确到不能再精确了。

教师:数学中我们常常需要把生活中的问题或一些描述性的语句用数学语言或符号来刻画,如函数的单调性、奇偶性、周期性等都是这样去研究的。对“ Δt 小到不能再小了”这句话,你能用数学的语言进行刻画吗?(学生不能够完成,只是让学生形成“用数学语言去刻画生活现象”的意识)

教师:其几何意义是什么?

学生:函数在该点处切线的斜率。

教师:从几何角度看,是用距离很小的两点连线的直线的斜率去估计在某一点处切线的斜率,实际上也是将很小距离的两点间的曲线看作是直线。

这部分内容需给学生多一点时间去争论、理解。

3.2 导数的发展过程(简要了解导数的发展历史)

教师:同学们非常棒,要知道我们刚才一起讨论的问题,在数学发展的历史中,它困扰了许多伟大的数学家,经历了很多的曲折,从问题的提出到最终的解决,跨越了几个世纪。

如何求变速运动中某一时刻的瞬时速度,求函数在某一点处切线的斜率,这些问题的提出要追溯到17世纪的欧洲,当时的欧洲正处于文艺复兴时期,社会和科学发展十分迅速,很多类似于这样的问题急需得到解决,许多科学家为此做了大量的工作,但在解决这些问题上贡献最大的是英国物理学家牛顿和德国数学家莱布尼兹,他们建立了比较系统的理论体系(微积分),把函数在某一点处切线的斜率称为导数。100多年后的19世纪,法国大数学家柯西和德国数学家维尔斯特拉斯对他们的理论进一步严格化,最终形成现代严格的微积分理论。

3.3 导数及其应用(导数要研究的内容)

教师:同学们通过研究,得到了曲线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处切线的斜率为2,也就是函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数为2。到目前为止,我们大致了解了导数的来源,了解了可以通过无限逼近的思想得到函数在某一点处的导数。大家想想看,在后面的学习中,除了需要研究导数的概念外,我们还需要解决哪些问题?可以研究哪些问题?

师生:还需要知道怎样求出其他点的导数及其他函数的导数,而每次通过逼近的方法求导数比较复杂,需要研究导数的运算。

我们发现函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数值为正。是否导数的值都是正数?能找到导数值为负号的情

形吗(当 $x=-1$ 时)?所以导数值有正有负。让学生观察部分函数图像上每一点导数值的变化。

问题3:导数值的符号什么时候为正?什么时候为负?

学生:导数值在单调增区间上为正,导数值在单调减区间上为负。

教师:看来导数值的符号与函数的单调性有联系,今后我们就多了一种解决函数单调性问题的方法。

问题4:导数值有可能为0吗?

学生:对二次函数 $y=x^2$ 来说,在最低点处导数值为0。

教师:曲线在某点处的导数值为0,曲线在这一点处具有怎样的特征?

学生1:可以通过求函数的导数来解决函数的最值问题。

学生2:导数值为0,不一定取最值,只能理解为这一点处的附近是最大(或最小)值。

教师:非常好!我们把这样的点(曲线在一点处的附近取最大值或最小值)称为极值点。这也是我们今后需要重点研究的问题。

刚才我们是从有限的图像上观察得到导数值符号的正负与函数单调性有关;导数值为0时与函数的极值和最值有关。这些问题还仅仅是我们初步形成的印象,他们之间究竟有着怎样的关系,是否还存在特殊情况,需要我们在今后的学习中进行深入研究。

例 商品的销量往往与其定价有关,经市场调研,某种产品当其定价为 x 元/件时($1 \leq x \leq 3$),其销售量为 $12-x^2$ 万件,问当定价为多少时,其销售额最大?

解:设销售额为 y ,则 $y=12x-x^3$ 。当定价为 a 时($1 \leq a \leq 3$),销售额最大。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[12(a+\Delta x) - (a+\Delta x)^3] - [12a - a^3]}{\Delta x} = \frac{12\Delta x - [3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x} = 12 - 3a^2 - 3a\Delta x - (\Delta x)^2,$$

当 Δx 趋向于0时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 a 处的导数为 $12-3a^2$,令 $12-3a^2=0$,则 $a=2$ 。

通过“几何画板”演示得到当 $x=2$ 时, y 取最大值。

教师:从本例中可以看出,导数可以帮助我们解决实际生活中比较复杂的最优问题。同时从运算过程中能感受到这种算法的复杂性,导数的运算成为我们迫切需要学习的问题。

4 课堂小结

通过本节课的学习,你能概述本章所要研究的内

容吗?在研究中要用到怎样的数学方法或思想?

5 回顾与反思

通常来说,章引言课的教学目标是让学生了解本章主要的学习内容、结构及主要的思想方法,是先行组织者,是一章内容的引领,是知识的生长点与归结点,也是知识、方法及数学思想的高度浓缩。通过章引言的教学,可以使学生对全章的学习内容有一个大致的了解,对本章的知识结构有比较清晰的印象。

5.1 章引言课首先要体现本章知识学习的必要性

对某个知识的学习总是要有其必要性的,为什么要学习这一章?一定是有所需要,有时候是为了解释生活中的现象,或者是在研究问题时现有知识不够用,也或者是知识的自然生长,等等。

学习本章知识,首先要明白微积分产生的原因,这主要是因为17世纪的欧洲,当时人们开始研究天体的运动,运动中的瞬时速度以及数学中要研究曲线的切线问题。在本节课的教学中,由一个实际的问题引入(气温图),对其反映的现象进行数学抽象(数学化),并根据物理中物体运动的速度情况,提出数学问题(研究对象),体会在解决这些问题时必须学习新的知识。在问题解决中生成概念,让学生感知新知识,通过观察,初步形成导数的相关性质(数学应用),最后回到生活实际,体会导数应用的同时,感受尽快弄清导数运算规律的必要性。

5.2 引言课要能体现本章知识研究的基本数学思想

数学思想方法是数学最本质、最具价值的内容,它是数学发展的内在动力,是数学知识的“灵魂”。在章引言课的教学中,重视对数学思想方法的介绍,有利于学生对知识的认知更加清晰、完整,有利于提升学生的思维品质。

历史上科学家们在研究物体运动的瞬时速度及求曲线的切线问题时引入了一些重要的数学思想,包含了运动、变化和无限的思想,用平均变化率去估计瞬时变化率,运用了无限逼近、以直代曲(极限)的思想。对这些重要的数学思想,实际上学生在初中学习圆的周长与面积公式时已经有所了解,本节课既要向学生予以介绍,同时也需要让学生去体会这些数学思想的运用。

5.3 引言课需要适时、恰当的数学文化引入

引言课目的在于使学生大致了解将要学习的知识和激发学生对将要学习知识的兴趣,以及在学习这些知识的常用思想方法。在教学中适时、恰当地引入数学文化,不仅能激发学生的兴趣,使课堂更加生动,而且对学生整体理解知识产生的根源及学习的必要性都会有极大的帮助。

鉴于微积分的发展过程非常曲折,它在数学发展中有着十分重要的地位,微积分为人类社会的进步做

出了巨大的贡献,在引言中有必要简单介绍一下微积分的发展历史。在学习中,让学生体会导数的研究过程及数学思想,及时肯定学生的学习成果,恰当地引入数学文化,使学生了解数学发生、发展的过程,感受人类社会与数学发展的紧密联系,发展求知、求实、勇于探索的情感和态度。

5.4 章引言课是培养学生批判性思维的重要载体

通常高中生批判性思维培养的要点可以概括为“会质疑(提出问题)、有理由(寻找证据)、讲逻辑(正确论证)”三个方面。实际上,对学生而言,以下的这些行为也是批判性思维的一个方面:寻找替代的方法;选择最简(优)的表述方式或解法;从不同的视角看问题。

无论是知识学习的必要性,还是基本数学思想的体现及今后知识的应用等,在引言课中都需要向学生予以阐述或介绍。对学生而言,学习新知识都会有大量的问题或疑问提出,这些问题怎样解决,在引言课中,会有一个大致方案(或解决问题的基本思路、思想),在具体深入学习中,则会考虑方方面面的情况。学生现在得到的初步结论是否有足够的理由,是否存在反例,是否可以进行数学证明等,都将为今后的学习埋下伏笔,也一定会引发学生的思考。因此,引言课也就成为培养学生批判性思维的一个重要的载体。

本节课批判性思维主要体现在:(1)求瞬时速度是一个难点,通过某种方式直接求某时刻的瞬时速度学生做不到,实际上也是不可能求出的。这时需要寻找替代的办法:用平均速度去估计瞬时速度。(2)感知导数的应用,学生通过观察发现导数与函数的单调性、最值有关。你的结论是什么,这些结论是否合理,理由是什么,这些理由是否充分。这是学生提出问题,寻找理由的过程,但需要予以论证。(3)本节课的主要目标是让学生了解本章的研究内容,形成知识框架,达到了解、感知的目的。所以只需要学生能够形成结论,并找到一些证据支撑,形成一个弱论证即可,但需要让学生清楚这些结论是需要进一步的研究和论证的,并用数学的逻辑语言进行表述。

其实对数学学科而言,我们几乎每一节课都在进行批判性思维的培养,但我们也经常发现学生在解决问题时思路单一、答非所问,这都与他们缺乏质疑、不关注理由、不讲逻辑的表现有关。数学批判性思维的培养首先要求教师要理解批判性思维,在教学中有意识地引导,同时有方法去培养学生的批判性思维,在长期的教学中潜移默化地影响学生并使他们逐渐养成良好的思维习惯。

参考文献:

- [1] 陶维林. 研究章引言,上好起始课[J]. 中国数学教育(高中版), 2010(3): 11-13.
- [2] 文卫星. 立体几何引言课教学设计[J]. 数学通报, 2005, 44(5): 21-22, 24.